на правах рукописи

Чегодаев Александр Вячеславович

Математические модели и методы оценки характеристик стохастических систем, близких к поглощающим.

Специальность 05.13.18 - Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Тверь - 2009

Работа выполнена на кафедре прикладной математики
Вологодского государственного педагогического университета

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук, профессор
Зейфман Александр Израилевич

Официальные оппоненты:
доктор физико-математических наук, профессор
Хохлов Юрий Степанович
доктор физико-математических наук, профессор
Язенин Александр Васильевич

Ведущая организация: Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова, факультет ВМК.

Защита состоится 22 января 2010 г. в 14.00 на заседании Диссертационного совета Д.212.63.04 по защите диссертаций на соискание ученой степени кандитата физико-математических наук при Тверском государственном университете (170100 г.Тверь, ул.Желябова, д.33, ауд 52).

С диссертацией можно ознакомиться в научной библитеке Тверского государственного университета по адресу: 170000, Тверь, ул.Володарского, 44а.

Объявление о защите диссертации и автореферат опубликованы 11.12.2009 г. на официальном сайте Тверского государственного университета по адресу: http://university.tversu.ru/aspirants/abstracts/.

Автореферат разослан декабря

Ученый секретарь диссертационного
совета, д.т.н. М.В.Михно

Общая характеристика работы

Актуальность темы исследования. Марковские цепи с непрерывным временем играют важдную роль в математическом моделировании многих процессов, возникающих в самых разнообразных областях исследований: технике, биологии, экономике, военном деле и т.д. Особенно успешными являются применения марковских моделей в теории массового обслуживания и теории надежности.

Впервые задачи теории массового обслуживания возникли из требований телефонного дела, физики и рациональной организации массового обслуживания (билетные кассы, магазины и прочее) в начале предыдущего столетия. Первые исследования по этой тематике были приведены в работах А.К.Эрланга. Основные его исследования в этой области относятся к 1908-1922 годам. С того времени интерес к проблемам, выдвинутым Эрлангом, значительно возрос. Оказалось, что подобные задачи возникают в самых разнообразных направлениях исследований: в естествознании, в технике, экономике, транспорте, военном деле, организации производства и многих других. Для решения проблем такого рода примерно в 50-х годах двадцатого века была создана так называемая теория массового обслуживания (англоязычный термин - теория очередей), являющаяся с тех пор активно развивающимся разделом прикладной теории вероятностей.

Большой прогресс для однородных марковских цепей был достигнут в последние два десятилетия с использованием специальных методик, в том числе каплинга, логарифмических неравенств Соболева, неравенства Пуанкаре и различных их модификаций. Активизация исследований в последнее время обусловлена новыми областями приложений, в частности в изучении алгоритмов статистического моделирования марковских цепей, компьютерных сетей, статистической физики.

Постоянно увеличивается интерес к исследованию нестационарных (неоднородных по времени) марковских цепей . Такие цепи возникают, в частности, при описании процессов массового обслуживания. Основная часть исследований посвящена различным вопросам, связанным с аппроксимацией для таких цепей.

В числе математиков, заложивших основы теории и приложений этой области и сформировавших ее современный облик (в части, близкой к тематике настоящего исследования), следует отметить Р.Л.Добрушина, Б.В.Гнеденко, В.В.Калашникова, И.П.Макарова, А.И.Зейфмана, Н.В.Карташова, В.В.Анисимова, E.Van Doorn'a, W.Whitt'a и многих других.

Как известно, получение явных выражений для вероятностей состояний стохастических моделей возможно лишь в исключительных случаях, поэтому одной из важнейших задач при исследовании таких моделей давно считается исследование поведения модели при $t \to \infty$ и, в частности, скорости сходимости к предельному режиму и связанных с этим функционалов.

Динамика таких процессов при некоторых дополнительных условиях описыватся прямой системой Колмогорова. В первоначальных исследованиях предполагалось, что модели описываются стационарными марковскими цепями (это означает, что соответствующая система Колмогорова имеет постоянную матрицу коэффициентов, которые называются интенсивностями переходов). С содержательной точки зрения такая ситуация соответствует тому, что, например, "интенсивности" поступления и обслуживания требований в систему не зависят от времени. Понятно, что такое предположение достаточно далеко от реальности. В связи с этим, начиная с 70-х годов прошлого века, начались исследования нестационарных моделей, которым соответствуют системы линейных диффернциалных уравнений с переменной матрицей интенсивностей.

Наиболее распространенной из моделей, описывающих реальные системы массового обслуживания, является так называемый процесс рождения и гибели - это частный случай марковского процесса с непрерывным временем и не более чем счетным числом состояний, в котором за малый промежуток времени реальны только изменения текущего состояния не более чем на единицу.

В настоящей работе исследуется класс марковских цепей с непрерывным временем, для которых интенсивность выхода из нулевого состояния в определенном смысле мала. Такие цепи возникают при изучении различных классов задач массового обслуживания. Рассматриваются в основном вопросы, связанные с получением методов оценок скорости перехода к предельному режиму и самого этого режима, устойчивости марковских цепей, а также вопросы, связанные с построением различных вероятностных характеристик исследуемых моделей (в частности, математического ожидания числа требований в системе).

Для изучаемых классов моделей удается получить условия эргодичности, оценить скорость сходимости к предельному режиму, указать методику приближенного посторения важных характеристик рассматриваемых цепей и соответствующие оценки для них.

Цель работы.

Исследование математических моделей стохастических процессов, близких к поглощающим. Разработка методов оценки характеристик для марковских моделей, близких к поглощающим. Получение методики вычисления предельного среднего и предельных вероятностей состояния и рассмотрение ее применения для конкретных классов моделей, в основном из теории массового обслуживания.

Методика исследования.

В работе исследуется прямая система Колмогорова, имеющая вид:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = A(t)\mathbf{p}, \quad \mathbf{p} = \mathbf{p}(t), \quad t \geq 0. \tag{0.1}$$

где $\mathbf{p}(t)$ - вектор-столбец вероятностей состояний описываемого процесса, а $A(t)$ - матрица специального вида.

В основном рассматривается случай счетного пространства состояний, которому соответствует счетная система (0.1), отождествляемая с дифференциальным уравнением в пространстве последовательностей l_1. При этом исследуются решения системы (0.1), лежащие в множестве стохастических векторов Ω, то есть в множестве векторов с неотрицательными координатами и единичной l_1-нормой.

При этом основные проблемы возникают при получении явных оценок нормы опреатора Коши. Для получения этих оценок используется логарифмическая норма оператора, понятие которой введено у Лозинского, а для операторов в банаховом пространстве изучено Далецким и Крейном.

Для марковских цепей сначала формулируются условия наличия или отстутствия эргодичности. В случае эргодичности получаются оценки для скорости сходимости к предельному режиму и некоторых характеристик. Затем в случае ПРГ рассматривается возможность аппроксимации процессом с меньшим числом состояний (то есть конечными системами вида (0.1) меньшей конечной размерности) и получаются оценки такой аппроксимации. Кроме того, разработана методика численного построения предельных вероятностей и математического ожидания.

Основные положения, выносимые на защиту.

- Нестационарные марковские модели с непрерывным временем, близкие к поглощающим.

- Условия эргодичности для близких к поглощающим марковских моделей с конечным и счетным пространством состояний. Методы оценки скорости сходимости к предельному режиму и самого этого режима, а также предельных характеристик процесса.

- Аппроксимация бесконечного процесса рождения и гибели конечным процессом рождения и гибели. Алгоритм нахождения предельных характеристик.

- Вопросы, связанные с существованием и построением предельных характеристик для систем массового обслуживания, описываемых нестационарными процессами рождения и гибели с периодическими интенсивностями.

Научная новизна.

Впервые подробно исследованы и систематизированы марковские модели с непрерывным временем, близкие к поглощающим. Получены условия эргодичности, оценки для скорости сходимости к предельному режиму и самого этого режима, а также характеристик для близких к поглощающим марковских цепей с конечным и счетным числом состояний. Полученные оценки существенно более точные, чем полученные ранее другими методами. Указан метод вычисления предельного среднего и предельных вероятностей состояния для конкретных классов моделей из теории массового обслуживания.

Практическая значимость результатов.

Полученные в работе результаты могут быть использованы в исследовании конкретных систем линейных дифференциальных уравнений и стохастических моделей в технике, химии, биологии, физике и других отраслях научных знаний.

Аппробация диссертации. Результаты работы докладывались на: семинарах кафедры прикладной математики ВГПУ (Вологда, 2008), ежегодных смортах-сессиях аспирантов и молодых ученых (Вологда, 2007, 2008), международной конференции им. И.Г.Петровского (Москва, 2007), Уфимской международной математической конференции (Уфа, 2007), международном семинаре по проблемам устойчивости стохастических моделей (Нахария, Израиль, 2007), международном семинаре "Моделирование систем в коммерции, промышленности и транспорте"(Рига, Латвия, 2008), международной конференции "Геометрия в Одессе"(Одесса, Украина, 2008), XVI международной конференции "Математика. Экономика. Образование" (Ростов - на - Дону, 2008), Международной конференции "Дифференциальные уравнения и топология"(Москва, 2008), XIII международной летней концеренции по вероятности и статистике (Созополь, Болгария, 2008), международной конференции "Геометрия в Астрахани"(Астрахань, 2008).

Публикации. Основные результаты опубликованы в [1]-[15]

Структура и объем диссертации. Диссертационная работа состоит введения, пяти глав, разбитых на параграфы, приложения, библиографического списка литературы, включающего 89 работ отечественных и зарубежных авторов. Работа изложена на 126 листах машинописного текста.

Краткое содержание работы.

Во введении дается обоснование актуальности темы диссертации, содержится краткий обзор работ по ее тематике, сформулированы основные результаты, полученные в работе.

Глава 1 является вспомогательной. В ней дается определение логарифмической нормы оператора, рассматриваются некоторые свойства подпространств в l_1 и некоторые свойства конечных и счетных систем дифференциальных уравнений, которые будут использоваться в дальнейшем. Рассматриваются некоторые свойства марковских цепей, а также приводятся понятия, связанные с эргодичностью марковских цепей.

Определение 1 *Число (оно всегда существует)*

$$\gamma(A(t)) = \lim_{h \to +0} \frac{\|I + h \cdot A(t)\| - 1}{h} \tag{0.2}$$

называется логарифмической нормой операторной функции $A(t)$.

В §1 главы 2 изучаются, вообще говоря, нестационарные счетные марковские цепи с непрерывным временем и поглощением в нуле. Исследуется скорость сходимости к предельному режиму. Рассматриваются неэргодичный и эргодичный случаи.

Пусть $X(t),\ t \geq 0$ – нестационарная марковская цепь со счетным пространством состояний $E = \{0, 1, ...\}$. Обозначим через $p_{ij}(s,t) = P(X(t) = j|X(s) = i)$, $i, j \in E$, $0 \leq s \leq t$ вероятность перехода из состояния i в состояние j, а $p_i(t) = P(X(t) = i), i \in E, t \geq 0$ – вероятность нахождения процесса в состоянии i. Пусть $\mathbf{p}(t) = (p_0(t), p_1(t), ...)^T$ – вектор вероятностей состояний, $Q(t) = (q_{ij}(t)), t \geq 0$ – соответствующая матрица интенсивностей. Положим $A(t) = (a_{ij}(t)) = Q^T(t) = (q_{ij}(t))^T$. Для рассматриваемого случая марковских цепей с поглощением в нуле выполняется условие $q_{00}(t) = a_{00}(t) \equiv 0$. Динамика такого процесса при некоторых дополнительных предположениях описывается прямой системой Колмогорова (0.1).

При этом оператор Коши $U(t,s)$, $0 \leq s \leq t$ уравнения (0.1) определяется матрицей $U^T(t,s) = P(s,t) = p_{ij}(s,t)$. Далее в тексте, если не указано противное, будет использоваться l_1–норма для векторов и матриц $\|\cdot\|$, а именно $\|x\| = \sum_i |x_i|$ и $\|C\| = sup_j \sum_i |c_{ij}|$, где $C = (c_{ij})$. Обозначим Ω множество всех стохастических векторов: $\Omega = \{\mathbf{x} = (x_0, x_1, ...)^T : \mathbf{x} \geq 0, \|\mathbf{x}\| = 1\}$.

Рассмотрим $\mathbf{p}(t) \in \Omega$, исключим из системы уравнение для нулевой координаты, полагая

$$p_0(t) = 1 - \sum_{i \geq 1} p_i(t),$$

тогда из (0.1) получается система

$$\frac{d\mathbf{z}}{dt} = B(t)\mathbf{z}, \tag{0.3}$$

где

$$B(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} \tag{0.4}$$

$$\mathbf{z} = (p_1, p_2 ...)^T \tag{0.5}$$

Пусть l_{1D} -пространство последовательностей, таких, что $\|\mathbf{x}\|_{1D} = \sum_{i=1}^{\infty} d_i |x_i| < \infty$. Сначала получим условия, обеспечивающие отсутствие эргодичности цепи.

Теорема 1 *Пусть существует последовательность* $\{d_i\}$ *положительных чисел такая, что* $\sup_{i \geq 1} d_i = d < \infty$,

$$\|B(t)\|_{1D} = \sup_{j \geq 1} \sum_{i \geq 1} \frac{d_i}{d_j} |a_{ij}(t)| < \infty,$$

а

$$\sum_{i \geq 1} \frac{d_i}{d_j} a_{ij}(t) \geq 0,$$

для произвольного $j \geq 1$ *и произвольного* $t \geq 0$*. Тогда цепь* $X(t)$ *неэргодична.*

Более того, справедлива следующая оценка

$$p_0(t) \leq 1 - \frac{1}{d} \sum_{n \geq 1} d_n p_n(0) < 1 \tag{0.6}$$

для произвольного $X(0) \neq 0$ *и произвольного* $t \geq 0$.

Обозначим через $E(t; k)$ математическое ожидание $X(t)$ при начальном условии $X(0) = k$.

Теорема 2 *Пусть выполнены условия теоремы 1 . Пусть, кроме того, выполнено неравенство*

$$\inf_{j\geq 1}\sum_{i\geq 1} i a_{ij}(t) \geq c^*(t), \tag{0.7}$$

где $c^*(t)$ *- некоторая функция, такая что*

$$\int_0^\infty c^*(t)dt = +\infty. \tag{0.8}$$

Тогда $E(t;k)$ *стремится к бесконечности при* $t \to \infty$ *для любого* $k \neq 0$*. Более того, справедлива следующая оценка:*

$$E(t;k) \geq k + \frac{d_k}{d}\int_0^t c^*(\tau)d\tau, \tag{0.9}$$

для произвольного $k \neq 0$ *и произвольного* $t \geq 0$*.*

Рассмотрим эргодичный случай.

Теорема 3 *Пусть существует последовательность* $\{d_i\}$ *положительных чисел такая, что* $\inf_{i\geq 1} d_i = d > 0$*, а*

$$\sup_{j\geq 1}\sum_{i\geq 1}\frac{d_i}{d_j} a_{ij}(t) = -\beta_*(t), \tag{0.10}$$

причем

$$\int_0^\infty \beta_*(t) = +\infty. \tag{0.11}$$

Тогда процесс $X(t)$ *эргодичен (с предельным режимом* $\pi = \mathbf{e_0}$*), и для любого допустимого* $X(0)$ *и* $\mathbf{z} = (p_1, p_2, ...)^T$ *справедливы оценки:*

$$\|\mathbf{z}(t)\|_{1D} \leq e^{-\int_0^t \beta_*(\tau)d\tau}\|\mathbf{z}(0)\|_{1D} \tag{0.12}$$

и

$$\|\mathbf{z}(t)\|_1 = \sum_{i\geq 1} p_i(t) \leq \frac{1}{d} e^{-\int_0^t \beta_*(\tau)d\tau}\sum_{i\geq 1} d_i p_i(0), \tag{0.13}$$

для любого $t \geq 0$*.*

Замечание 1 *В стационарном случае при выполнении условия* $\beta_* > 0$ *справедливы оценки*

$$\|\mathbf{z}(t)\|_{1D} \leq e^{-\beta_* t}\|\mathbf{z}(0)\|_{1D}, \tag{0.14}$$

$$\|\mathbf{z}(t)\|_1 = \sum_{i\geq 1} p_i(t) \leq \frac{1}{d} e^{-\beta_* t} \sum_{i\geq 1} d_i p_i(0), \tag{0.15}$$

и

$$p_0(t) \geq 1 - \frac{1}{d} e^{-\beta_* t} \sum_{i\geq 1} d_i p_i(0), \tag{0.16}$$

для любого $t \geq 0$.

При этом попутно получается и оценка для так называемого параметра сходимости, вводимого следующим образом: $\beta = sup_{i,j}(\lambda / p_{ij}(t) - \pi_j = O(e^{-\lambda t}))$ при $t \to \infty$, а именно, $\beta \geq \beta_*$. Более того, мы получили не только оценку для этого параметра, а существенно более содержательные явные неравенства (0.14) - (0.16).

Теорема 4 *Пусть выполнены условия теоремы 3, и кроме того,*

$$W = \inf_{k\geq 1} \frac{d_k}{k} > 0. \tag{0.17}$$

Тогда $X(t)$ *имеет предельное среднее* $\phi = \sum k p_k = 0$, *и справедлива следующая оценка:*

$$E(t;k) \leq \frac{k}{W} e^{-\int_0^t \beta_*(\tau)\, d\tau}. \tag{0.18}$$

Замечание 2 *Аналогично получаются нижние оценки для скорости сходимости.*

В §2 главы 2 изучаются, вообще говоря, нестационарные конечные марковские цепи с непрерывным временем и поглощением в нуле. Исследуется скорость сходимости к предельному режиму в эргодичном случае.

В §1 главы 3 изучаются, вообще говоря, нестационарные счетные марковские цепи с непрерывным временем, нулевое состояние которых является «почти поглощающим». Рассматриваются эргодичный и нуль-эргодичный случай.

Рассмотрим вспомогательную последовательность положительных чисел $\{d_i\}$ и будем сначала предполагать, что

$$0 < m = \inf_i d_i; \quad M = \sup_{i,j} \frac{d_i}{d_j} < \infty. \tag{0.19}$$

Положим $\alpha_i^*(t) = \sum_{j\geq 1} \frac{d_j}{d_i} a_{ji}(t)$ и $\beta_*(t) = \inf_{i\geq 1} -\alpha_i^*(t)$.

Пусть

$$|a_{00}(t)| \leq \varepsilon \beta_*(t), \quad t \geq 0, \tag{0.20}$$

причем

$$\int_0^\infty \beta_*(t)\,dt = +\infty \tag{0.21}$$

Теорема 5 *Пусть $\{d_i\}$ – последовательность положительных чисел такая, что (0.19), (0.20) и (0.21) выполнены. Пусть ε достаточно мало. Тогда $X(t)$ слабо эргодична, причем при всех $\mathbf{p}(0)$ справедливы следующие оценки:*

$$\sum_{i\ge1} d_i\,|p_i(t)-\pi_i(t)| \le e^{-\int_0^t (1-M\varepsilon)\beta_*(\tau)\,d\tau} \sum_{i\ge1} d_i\,|p_i(0)-\pi_i(0)| \le 2Me^{-\int_0^t (1-M\varepsilon)\beta_*(\tau)\,d\tau} \tag{0.22}$$

и

$$\liminf_{t\to\infty} p_0(t) \ge 1 - \frac{M\varepsilon}{m\,(1-M\varepsilon)}, \tag{0.23}$$

где $\pi(t) = (\pi_0(t), \pi_1(t), \ldots)^T$ – предельное (квази-стационарное) распределение вероятностей цепи.

Теорема 6 *Пусть $\{d_i\}$ - неубывающая последовательность положительных чисел такая, что $d_1 = 1$, выполнены (0.20), (0.21), а кроме того, при некотором N выполняется условие $q_{0i}(t) = a_{i0}(t) = 0$ при всех $i > N,\ t \ge 0$. Пусть ε достаточно мало. Тогда $X(t)$ слабо эргодична, причем при всех $\mathbf{p}(0)$ справедливы следующие оценки:*

$$\sum_{i\ge1} d_i\,|p_i(t)-\pi_i(t)| \le e^{-\int_0^t (1-d_N\varepsilon)\beta_*(\tau)\,d\tau} \sum_{i\ge1} d_i\,|p_i(0)-\pi_i(0)|\,, \tag{0.24}$$

$$\liminf_{t\to\infty} p_0(t) \ge 1 - \frac{d_N\varepsilon}{1-d_N\varepsilon}, \tag{0.25}$$

а кроме того,

$$\limsup_{t\to\infty} E(t,\mathbf{p}) \le \frac{d_N\omega\varepsilon}{1-d_N\varepsilon}, \tag{0.26}$$

где $\omega = \sup_{k\ge1}\frac{k}{d_k}$, а $E(t,\mathbf{p})$ – среднее (математическое ожидание) для $X(t)$ при начальном распределении вероятностей состояний $\mathbf{p}(0) = \mathbf{p}$.

В §2 главы 3 рассматриваются близкие к поглощающим счетные ПРГ.

В §3 и 4 главы 3 рассматриваются близкие к поглощающим конечные марковские цепи и ПРГ соответственно.

В §5 главы 3 рассматриваются близкие к поглощающим ПРГ с катастрофами.

Пусть $X = X(t)$, $t \geq 0$ - ПРГ с катастрофами, и пусть $\lambda_n(t)$, $\mu_n(t)$ и $\xi(t)$ - интенсивности рождения, гибели и катастрофы соответственно.

Динамика такого процесса описывается прямой системой Колмогорова:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{A}\left(t\right)\mathbf{p} + \mathbf{g}(t), \quad t \geq 0,, \tag{0.27}$$

где $\mathbf{g}(t) = (\xi(t), 0, 0, \dots)^T$.

Ограничимся рассмотрением ПРГ, где интенсивности имеют следующий вид:

$$\lambda_n\left(t\right) = \nu_n \lambda\left(t\right), \ \mu_n\left(t\right) = \eta_n \mu\left(t\right), \quad t \geq 0, \quad n \in E, \tag{0.28}$$

также будем предполагать, что интенсивности ограничены, $0 \leq \eta_n \leq M, \ 0 \leq \nu_n \leq M$, $\lambda(t) + \mu(t) + \xi(t) \leq L < \infty$.

Рассмотрим матрицу

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & d_1 & d_1 & \cdots \\ 0 & d_2 & d_2 & \cdots \\ 0 & 0 & d_3 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \tag{0.29}$$

и пространства последовательностей

$$\ell_{1D} = \left\{ \mathbf{z} = (p_1, p_2, \dots)^T : \|\mathbf{z}\|_{1D} = \|D\mathbf{z}\|_1 < \infty \right\}, \tag{0.30}$$

и

$$\mathcal{B} = \left\{ \mathbf{z} = (p_1, p_2, \dots)^T : \|\mathbf{z}\|_{\mathcal{B}} = \sum_{i \geq 1} d_i |p_i| < \infty \right\}, \tag{0.31}$$

Положим

$$\alpha_k = \lambda_k(t) + \mu_{k+1}(t) - \frac{d_{k+2}}{d_{k+1}} \lambda_{k+1}(t) - \frac{d_k}{d_{k+1}} \mu_k(t), \quad k \geq 0, \tag{0.32}$$

и

$$\beta(t) = \inf_{k \geq 0} \alpha_k(t), \ \int_0^\infty \beta(t)\,dt = +\infty \tag{0.33}$$

и

$$\lambda_0(t) \leq \varepsilon, \quad t \geq 0. \tag{0.34}$$

Теорема 7 *Пусть $\{d_i\}$ - неубывающая последовательность положительных чисел такая, что $d_1 = 1$ и числа d_i возрастают достаточно быстро, так что $\inf\limits_{k\geq 1} \frac{d_k}{k} = \omega > 0$. Пусть все интенсивности 1-периодические. Тогда существует 1-периодический предельный режим $\pi(t) = (\pi_0(t), \pi_1(t), \dots)^T$ и соответствующее предельное среднее $\phi(t)$. Более того, справедливы следующие оценки:*

$$\|\mathbf{p}(t) - \pi(t)\|_{\mathcal{B}} \leq 2e^{-\int\limits_0^t \beta(\tau)\, d\tau} \|\mathbf{p}(0) - \pi(0)\|_{1D}, \tag{0.35}$$

$$|\phi(t) - E(t;k)| \leq \frac{2}{\omega} e^{-\int\limits_0^t \beta(\tau)\, d\tau} \|\pi(0) - \mathbf{e_k}\|_{1D}. \tag{0.36}$$

Пусть

$$\sup_{|t-s|\leq 1} \int\limits_s^t \beta(\tau)\, d\tau = K < \infty,\ \beta^* = \int_0^1 \beta(u)\, du \tag{0.37}$$

Следствие 1 *Пусть при допущениях предыдущей теоремы $X(0) = k$. Тогда справедливы следующие оценки:*

$$\|\mathbf{p}(t) - \pi(t)\|_{\mathcal{B}} \leq 2e^{-\int\limits_0^t \beta(\tau)\, d\tau} \left(\sum_{i=1}^k d_i + \frac{e^K \varepsilon}{\beta^*}\right), \tag{0.38}$$

и

$$|\phi(t) - E(t;k)| \leq \frac{2}{\omega} e^{-\int\limits_0^t \beta(\tau)\, d\tau} \left(\sum_{i=1}^k d_i + \frac{e^K \varepsilon}{\beta^*}\right). \tag{0.39}$$

В главе 4 приводятся описания некоторых моделей, для которых могут использоваться полученные результаты.

Глава 5 посвящена вычислению предельных характеристик рассмотренных моделей.

Система массового обслуживания, близкая к поглощающей, с катастрофами. Рассмотрим систему массового обслуживания, которая описывается ПРГ с катастрофами $X = X(t)$, $t \geq 0$. Пусть $\lambda_n(t)$, $\mu_n(t)$ и $\xi(t)$ - интенсивности рождения, гибели и катастрофы соответственно. Рассмотрим семейство усеченных процессов $X_n(t)$ с пространством состояний $E_n = \{0, 1, \dots, n\}$, и матрицами интенсивностей $A_n(t)$.

Теорема 8 *Пусть выполнены условия теоремы 7. Пусть $X(0) = X_n(0) = 0$. Тогда*

$$\|\pi(t) - \mathbf{p}_n(t)\|_1 \leq 2e^{-\int\limits_0^t \beta(\tau)\, d\tau} \frac{e^K \varepsilon}{\beta^*} + \frac{6LMw_n^1 e^K \varepsilon t}{\beta^*}, \tag{0.40}$$

и

$$|\phi(t)-E_{0,n}(t)| \le \frac{2}{\omega} e^{-\int\limits_0^t \beta(\tau)\,d\tau} \frac{e^K \varepsilon}{\beta^*} + \frac{6LMw_n^2 e^K \varepsilon t}{\beta^*}, \qquad (0.41)$$

для любых $t \ge 0$, n, *где* $w_n^1 = \sup_{k\ge n} \frac{1}{d_k}$, $w_n^2 = \sup_{k \ge n} \frac{k}{d_k}$ *и* $E_{0,n} = E\{X_n(t)\,|X_n(0)=0\}$.

Мы можем получить важные оценки для предельних характеристик (предельных 1-периодических вероятностей состояния и предельного среднего) рассматриваемого процесса. Именно, пусть даны интенсивности $\lambda(t)$, $\mu(t)$ и $\xi(t)$. Тогда при условиях предыдущей теоремы существует 1-периодический предельный режим $\pi(t) = (\pi_0(t), \pi_1(t), \dots)^T$ и имеется метод, позволяющий вычислить предельные 1-периодические вероятности состояний $J_k(t)$ (вероятность того, что длина цепи в момент времени t не превосходит k) следующим способом.

Пусть δ - произвольное положительное число.

1. Выберем число m так, чтобы первое слагаемое в правой части (5.1.14) было меньше чем $\delta/3$ для любого $t \ge m$.

2. Выберем n так, чтобы второе слагаемое в правой части (5.1.14) было меньше, чем $\delta/3$ для любого $t \le m+1$.

3. Тогда решение задачи Коши для урезанной системы Колмогорова с начальным условием $\mathbf{e}_0$ на интервале $[m; m+1]$ (с погрешностью $\delta/3$) дает нам предельный 1-периодический режим $\pi(t) = (\pi_0(t), \pi_1(t), \dots)^T$ с погрешностью δ.

4. Наконец, предельное поведение $J_k(t) = \Pr\{X(t) \le k\}$ может быть вычислено как $\sum_{i=0}^k \pi_i(t)$ с той же погрешностью δ.

Подобным образом может быть найдено и предельное среднее.

Вычислим предельное среднее $\phi(t)$ и вероятности состояний $J_k(t)$ для некоторых k. В частности, $J_0(t)$ - вероятность того, что очередь свободна в момент t.

Рассмотрим систему обслуживания $M(t)/M(t)/100$ с катастрофами и интенсивностями $\lambda(t) = 0.1 + 0.1\sin 2\pi t$, $\mu(t) = 4 + 2\cos 2\pi t$, $\xi(t) = 2 + \sin 4\pi t$.

Используя метод, описанный в главе 3, положим $d = 2$ и $d_k = d^k$. Тогда имеем $\varepsilon = 0.2$ $L = 9.2$, $M = 100$, $w_n^1 = 2^{-n}$, $w_n^2 = \frac{n}{2^n}$, кроме того, $\beta(t) = \mu(t) - \frac{1}{d}\mu(t) - (d-1)\lambda(t) = 1.9 + \cos 2\pi t - 0.1 \sin 2\pi t$, $K \le 3$, и $\beta^* = 1.9$.

Пусть $\delta = 10^{-6}$. Тогда достаточно выбрать $m = 12$ и $n = 44$. Тогда получаем предельное среднее $\phi(t)$ и все вероятности состояний $J_k(t)$ с погрешностью $\delta = 10^{-6}$ как соответствующие характеристики решения задачи Коши с начальным условием $\mathbf{e}_0$ для соответствующей урезанной системы Колмогорова на интервале $[m, m+1]$.

Графики 1 и 2 показывают приближения для предельных характеристик $\phi(t)$ и $J_0(t)$.

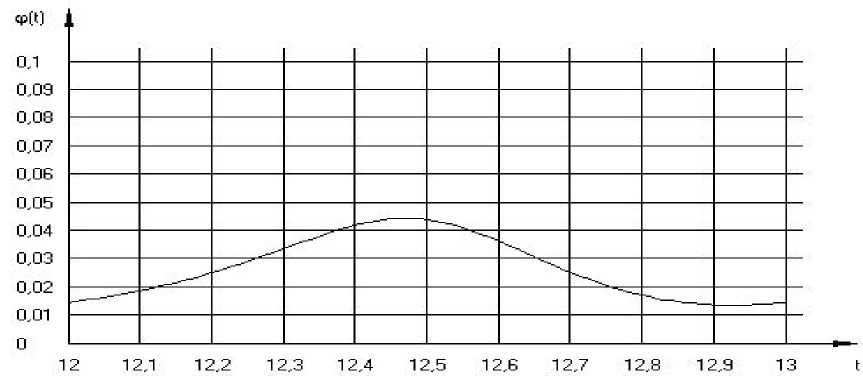

Рис. 1: $\phi(t)$ при $t \in [12; 13]$

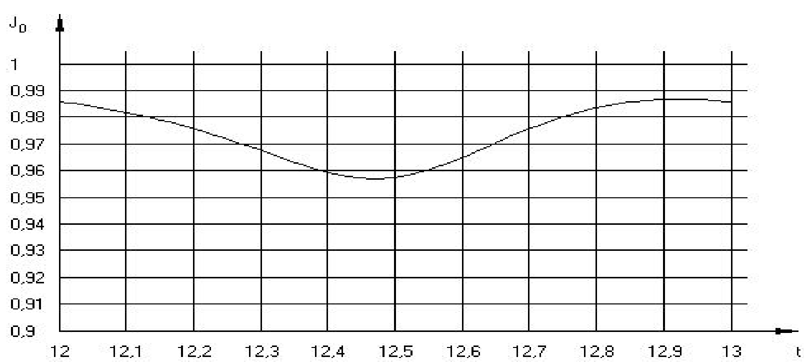

Рис. 2: $J_0(t)$ при $t \in [12; 13]$

Приложение содержит исходные тексты программы, с помощью которой проводились вычисления.

Полученные в работе результаты позволяют исследовать новые классы СМО, описывающиеся нестационарными марковскими цепями, близкими к поглощающим.

Публикации в изданиях, рекомендованных ВАК

[1] Зейфман А.И., Чегодаев А.В., Шоргин В.С. Некоторые оценки для близких к поглощающим марковских моделей. Информатика и ее применения, 2008, 2, №2, 35-40.

[2] Зейфман А.И., Сатин Я.А., Чегодаев А.В. О нестационарных системах обслуживания с катастрофами. Информатика и ее применения, 2009, 3, №1, 47-54.

Остальные публикации

[3] Зейфман А.И, Чегодаев А.В., Шилова Г.Н. Оценки скорости сходимости к предельному режиму для некоторых нестационарных линейных систем. Международная конференция им. И.Г.Петровского. М., МГУ, Тезисы докладов, 2007, 347-348.

[4] Шилова Г.Н.,Зейфман А.И., Чегодаев А.В. О точных оценках скорости сходимости для конечных марковских цепей с поглощением в нуле. Уфимская международная математическая конференция. Тезисы докладов. т. 3. Уфа, 2007.35-36.

[5] Чегодаев А.В. Оценки скорости сходимости для однородных марковских цепей с поглощением в нуле. Материалы ежегодных смотров-сессий аспирантов и молодых ученых по отраслям наук. Естественные и физико-математические науки. Вологда, 2007, 148-151.

[6] Зейфман А.И., Чегодаев А.В. Оценки скорости сходимости для счетных марковских цепей с поглощениям в нуле. Стат. методы оценивания и проверки гипотез. Пермь, ПГУ, 2008, 196-207.

[7] Зейфман А.И., Чегодаев А.В. Оценки скорости сходимости для некоторых счетных линейных систем. Международная конференция "Дифференциальные уравнения и топология". М., МГУ, Тезисы докладов, 2008, 128-129.

[8] Зейфман А.И., Чегодаев А.В., Шилова Г.Н. Некоторые оценки для почти поглощающих процессов рождения и гибели. XVI международная конференция "Математика. Экономика. Образование". Тезисы докладов. Ростов-на-Дону, 2008, 130.

[9] Zeifman A., Chegodaev A. The bounds on the rate of convergence for absorbing continuous-time Markov chains. Finite state space. Trans. of Int. Seminar of Stability Problems for Stochastic Models, Nahariya, Israel, 2007, 201-207.

[10] Zeifman A., Chegodaev A., Shilova G. Almost absorbing continuous-time Markov chains on finite state space. Trans. of Int. Conference "Modelling of business, industrial and transport systems", Riga, 2008, 213-217.

[11] Zeifman A., Chegodaev A. On the bounds of solutions for some linear systems. International Conference "Geometry in Odessa 2008", Abstracts, Odessa, 2008, 204-205.

[12] Zeifman A., Chegodaev A. Some bounds for almost absorbing Markov chains. XIII International Summer Conference on Probability and Statistics, Abstracts, Sozopol, Bulgaria, 2008, 38.

[13] Zeifman A., Satin Ya., Chegodaev A., Shilova G. Some bounds for the system of differential equations for M(t)/M(t)/N queue with catastrophes. International Conference "Geometry in Astrakhan 2008 ", Abstracts, Astrakhan, 2008, 84-86.

[14] A. Zeifman, Ya. Satin, A. Chegodaev, V. Bening, V. Shorgin. Some Bounds for M(t)/M(t)/S Queue with Catastrophes. The 3rd International Workshop on Tools for solving Structured Markov Chains, Athens, Greece, 2008.

[15] Zeifman A., Satin Ya., Chegodaev A. Some bounds for almost absorbing birth and death processes with catastrophes. Pliska Studia Mathematica Bulgarica, **19**(2009), 293-306.