на правах рукописи

Сатин Яков Александрович

ИССЛЕДОВАНИЕ НЕКОТОРЫХ СРЕДНИХ ХАРАКТЕРИСТИК СТОХАСТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ.

Специальность 05.13.18 - Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Саранск - 2007

Работа выполнена на кафедре прикладной математики Вологодского государственного педагогического университета

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук, профессор
Зейфман Александр Израилевич.

Официальные оппоненты:
доктор физико-математических наук, профессор
Горбунов Владимир Константинович.
кандидат физико-математических наук, доцент
Шаманаев Павел Анатольевич.

Ведущая организация: Самарский государственный университет

Защита состоится 7 ноября 2007 г. на заседании диссертационного совета КМ.212.117.07 при Мордовском государственном университете имени Н.П.Огарева по адресу: 430000, г. Саранск, ул. Большевистская, 68, ауд. 225

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке Мордовского государственного университета имени Н.П.Огарева.

Автореферат разослан: ________________________.

Ученый секретарь диссертационного
совета, к.ф.-м.н., Л.А. Сухарев

Общая характеристика работы

Актуальность темы исследования. Марковские цепи с непрерывным временем играют важную роль в математическом моделировании многих процессов, возникающих в самых разнообразных областях исследований: технике, биологии, экономике, военном деле и т.д. Особенно успешными являются применения марковских цепей в теории массового обслуживания и теории надежности.

Первоначально такого рода задачи возникли из требований телефонного дела, физики и рациональной организации массового обслуживания (билетные кассы, магазины и прочее) в начале предыдущего столетия. Первые исследования по этой тематике были приведены в работах А. К. Эрланга. Основные его исследования в этой области относятся к 1908-1922 годам. С того времени интерес к проблемам, выдвинутым Эрлангом, значительно возрос. Оказалось, что подобные задачи возникают в самых разнообразных направлениях исследований: естествознании, технике, экономике, транспорте, военном деле, организации производства и многих других. Для решения проблем такого рода примерно в 50-х годах двадцатого века была создана так называемая теория массового обслуживания (англоязычный термин - теория очередей), являющаяся с тех пор активно развивающимся разделом прикладной теории вероятностей.

В числе математиков, заложивших основы теории и приложений этой области и сформировавших ее современный облик (в части, близкой к тематике настоящего исследования), следует отметить Р. Л. Добрушина, Б. В. Гнеденко, В. В. Калашникова, И. П. Макарова, А. И. Зейфмана, Н. В. Карташова, В. В. Анисимова, E. Van Doorn'a, W.Whitt'a и многих других.

Наиболее распространенной из моделей, описывающих реальные системы массового обслуживания, является так называемый процесс рождения и гибели - это частный случай марковского процесса с непрерывным временем и не более чем счетным числом состояний. В основном в работе изучаются именно ПРГ, но затрагиваются и более общие процессы типа рождения и гибели (ОПТРГ), которые широко используются при моделировании эпидемических ситуаций.

В работе рассматриваются вопросы, связанные с периодическими режимами, которые имеют важное значение в прикладной математике при изучении математических моделей в разнообразных областях исследований. Периодические решения и устойчивость дифференциальных уравнений изучали многие авторы, например, В. А. Якубович, М. Г. Крейн, Е. В. Воскресенский, А. И. Перов, М.Т.Терехин.

Цель работы:

Изучение математических моделей процессов рождения и гибели (ПРГ), общих процессов типа рождения и гибели (ОПТРГ), сводящихся к системам линейных дифференциальных уравнений. Исследование вопросов существования двойного среднего и предельного среднего, и вопросов вычисления этих характеристик, а также скорости сходимости к ним.

Методика исследования:

Для решения поставленных задач используется эволюционный оператор (оператор Коши) и генеральный показатель дифференциального уравнения в банаховом пространстве, и методы их оценки. Проблемы вычисления искомых параметров сводятся к изучению дифференциальных уравнений на множестве стохастических векторов. В этом случае возникают проблемы, связанные с получением явных оценок генерального показателя. Для получения этих оценок используется логарифмическая норма оператора, понятие которой введено у Лозинского, а для операторов в банаховом пространстве изучено Далецким и Крейном. В случае ПРГ доказывается существование предельного среднего и получена его оценка. Получена оценка для предельного среднего и двойного среднего через систему с меньшим числом состояний. В случае ОПТРГ предполагается слабая эргодичность $X(t)$. Доказывается существование и получаются оценки. Рассматриваются другие способы вычисления указанных параметров.

Научная новизна:

В диссертации найдены новые условия существования предельных средних и способы их вычисления, а также получены оценки скорости сходимости к этим характеристикам.

Практическая значимость результатов: Полученные в работе результаты могут быть использованы в исследовании конкретных систем линейных дифференциальных уравнений и стохастических моделей в технике, химии, биологии, физике и других отраслях научных знаний.

Основные положения, выносимые на защиту:

- Достаточные условия существования среднего и двойного среднего для бесконечного процесса рождения и гибели с периодическими интенсивностями. Определение скорости сходимости данных характеристик.

- Аппроксимация бесконечного процесса рождения и гибели конечным процессом рождения и гибели. Алгоритм нахождения предельных средних характеристик.

- Вопросы, связанные с существованием и построением предельных средних характеристик для систем массового обслуживания, описываемых нестационарными процессами рождения и гибели с интенсивностями, близкими к периодическим.

Апробация диссертации: Результаты работы докладывались на: семинарах кафедры прикладной математики ВГПУ (2005 год), на заседании научно-исследовательского семинара по качественной теории дифференциальных уравнений в Рязанском государственном университете, семинаре в Римском университете (Италия, 2003 год), зимней школе "Современные проблемы теории функций и их приложения" (Саратов, 2004) международной школе-семинаре по геометрии и анализу (Ростов-на-Дону, 2004), 24 международном семинаре по проблемам устойчивости стохастических моделей в Юрмале (Латвия, 2004 год), 25 международном семинаре по проблемам устойчивости стохастических моделей в Майори (Италия, 2005 год), на объединенных научных семинарах кафедры прикладной математики и Средневолжского математического общества под руководством профессора Е.В. Воскресенского (Саранск, 2006)

Публикации: Основные результаты опубликованы в [1]-[12].

Структура и объем диссертации: Диссертационная работа состоит из введения, пяти глав, разбитых на параграфы, приложения, библиографического списка литературы, включающего 71 работу отечественных и зарубежных авторов. Работа изложена на 129 листах машинописного текста.

Краткое содержание работы:

Во введении дается обоснование актуальности темы диссертации, содержится краткий обзор работ по ее тематике, сформулированы основные результаты, полученные в работе.

Глава 1 является вспомогательной. В ней даются определения предельного среднего и двойного среднего, приводится пространство l_1, логарифмическая норма оператора, ОПТРГ и ПРГ, рассматриваются некоторые свойства подпространств в l_1, которые будут использоваться в дальнейшем.

Определение 1 *Будем называть функцию $\phi(t)$ предельным средним для цепи $X(t)$, если*

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \left| E\left\{X(t)\left|X(0)=k\right.\right\} - \phi(t)\right| = 0$$

для любого $k \geq 0$.

Определение 2 *Если предел*

$$\mathsf{E} = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t E\left\{X(u)\left|X(0)=k\right.\right\}du, \tag{0.1}$$

существует и не зависит от k, то E называется двойным средним для цепи $X(t)$.

В §1 главы 2 получены достаточные условия существования среднего и двойного среднего для бесконечного ПРГ с периодическими интенсивностями. Рассмотрена аппроксимация бесконечного ПРГ конечным ПРГ.

Пусть $X(t)$, $t \geq 0$, нестационарный ПРГ с пространством состояний $S = \{0,1,\ldots\}$, и интенсивностями рождения $\lambda_n(t)$, $t \geq 0$, и гибели $\mu_n(t)$, $t \geq 0$, $n \in S$.

Вероятности состояний ПРГ описываются системой:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = A(t)\,\mathbf{p}, \quad \mathbf{p} = \mathbf{p}(t), \quad t \geq 0. \tag{0.2}$$

Далее предполагается выполнение следующих условий:

$$\lambda_n(t) = \nu_n a(t), \ \mu_n(t) = \eta_n b(t), \quad t \geq 0, \quad n \in S, \tag{0.3}$$

где

$$\mu_0 = 0, \ 0 \leq \nu_n \leq L, \ n = 0,\ldots, \quad 0 < \eta_n \leq M, \ n = 1,\ldots. \tag{0.4}$$

Пусть $a\,(t)\,,\ b\,(t)$ неотрицательны, 1-периодичны и интегрируемы на $[0,1]$. Более того, предполагается, что для всех $t\in[0,1]$

$$a\,(t)\le \mathsf{a}, b\,(t)\le \mathsf{b}. \tag{0.5}$$

Возьмем последовательность положительных чисел $1=d_{-1}=d_0\le d_1\le\ldots$. Положим

$$\alpha_k\,(t)=\lambda_k\,(t)+\mu_{k+1}\,(t)-\frac{d_{k+1}}{d_k}\lambda_{k+1}\,(t)-\frac{d_{k-1}}{d_k}\mu_k\,(t)\,,\quad ,k\ge 0, \tag{0.6}$$

и

$$\alpha\,(t)=\inf_k \alpha_k\,(t)\,,\quad \alpha^*=\int_0^1\alpha(t)\,dt,$$

$$M_0=\sup_{|t-s|\le 1}\int_s^t\alpha(u)\,du,\quad \mathsf{M}=e^{M_0+\alpha^*},\quad \mathsf{W}=\inf_k\frac{\sum_{i=0}^{k-1}d_i}{k}. \tag{0.7}$$

Введем обозначение: X_N - марковская цепь, полученная из $X(t)$, с состояниями $\{0,1,\ldots,N\}$.

Теорема 1 *Пусть существует последовательность $\{d_i\}$ такая, что $\alpha^*>0$ и $\omega=\inf_{k\ge1}\frac{d_{k-1}}{k}>0$. Тогда существует предельное среднее $\phi(t)$, такое, что $|E\{X(t)|X(0)=k\}-\phi(t)|\to 0$ при $t\to\infty$ для любого k. Более того, верна следующая оценка для $k=0$:*

$$|E\{X(t)|X(0)=k\}-\phi(t)|\le\frac{\mathsf{M}^2\mathsf{a}\nu_0}{\mathsf{W}\alpha^*}e^{-\alpha^* t}. \tag{0.8}$$

Теорема 2 *Пусть существует последовательность $\{d_i\}$ такая, что $\alpha^*>0$. Тогда для любого $t\ge0$*

$$|E\{X(t)|X(0)=0\}-E\{X_N(t)|X_N(0)=0\}|\le\frac{3t\mathsf{M}\mathsf{a}\nu_0\,(L\mathsf{a}+M\mathsf{b})}{\mathsf{W}_N\alpha^*}, \tag{0.9}$$

где

$$\mathsf{W}_N = \inf_{k\ge 0} \frac{\sum_{i=0}^{k} d_{N-1+i}}{N+k}. \tag{0.10}$$

Теорема 3 *Пусть существует последовательность $\{d_i\}$ такая, что $\alpha^* > 0$. Тогда для любого $t \ge 0$*

$$|\phi(t) - E\{X_N(t)|X_N(0)=0\}| \le \frac{\mathsf{M}^2\mathsf{a}\nu_0}{\mathsf{W}\alpha^*}e^{-\alpha^* t} + \frac{3t\mathsf{Ma}\nu_0\,(L\mathsf{a}+M\mathsf{b})}{\mathsf{W}_N\alpha^*}. \tag{0.11}$$

Теорема 4 *Пусть существует последовательность $\{d_i\}$ такая, что $\alpha^* > 0$ и $\inf_{k\ge 1}\frac{d_{k-1}}{k} > 0$. Тогда ПРГ имеет двойное среднее E. Более того, верны оценки*

$$\left|\mathsf{E} - \int_t^{t+1} E\{X(u)|X(0)=0\}du\right| \le \frac{\mathsf{M}^2\mathsf{a}\nu_0}{\mathsf{W}\alpha^*}e^{-\alpha^* t}, \tag{0.12}$$

и

$$\left|\mathsf{E} - \int_t^{t+1} E\{X_N(u)|X_N(0)=0\}du\right| \le \frac{\mathsf{M}^2\mathsf{a}\nu_0}{\mathsf{W}\alpha^*}e^{-\alpha^* t} + \frac{3(t+1)\mathsf{Ma}\nu_0\,(L\mathsf{a}+M\mathsf{b})}{\mathsf{W}_N\alpha^*}. \tag{0.13}$$

Замечание 1 *Неравенство (0.11) позволяет находить предельное среднее с заданной точностью. Для начала находим t, при котором первое слагаемое достаточно мало. Затем, зафиксировав полученное t, находим N так, чтобы второе слагаемое было достаточно мало ($\mathsf{W}_N \to \infty$ при $N \to \infty$). Теорема 3 позволяет вычислять предельное среднее с заданной точностью.*

Замечание 2 *Оценки (0.11)и(0.13) состоят из двух слагаемых. Для первого и второго слагаемых можно взять различные последовательности d_i, с целью их уменьшения.*

В §2 главы 2 получены достаточные условия существования среднего и двойного среднего для конечного ПРГ с периодическими интенсивностями. Рассмотрена аппроксимация конечного ПРГ конечным ПРГ с меньшим числом состояний.

В §3 главы 2 рассмотрены системы массового обслуживания, описываемые нестационарными процессами рождения и гибели с интенсивностями, близкими к периодическим. Исследованы вопросы, связанные с существованием и построением предельных средних характеристик.

Пусть $X(t)$, $t \geq 0$, – "вспомогательный" неоднородный ПРГ с пространством состояний $S = \{0, 1, \ldots\}$, интенсивности рождения $\lambda_n(t)$, $t \geq 0$, и гибели $\mu_n(t)$, $t \geq 0$, $n \in S$, которого являются периодическими функциями от времени t с периодом, равным единице. Будем предполагать, что для вспомогательного процесса выполняются условия стандартные для ситуации с переменными интенсивностями (0.3)-(0.5):

Рассмотрим теперь основной ("возмущенный") ПРГ $X^*(t)$, $t \geq 0$, с тем же пространством состояний S и интенсивностями рождения $\lambda_n^*(t)$, $t \geq 0$, и гибели $\mu_n^*(t)$, $t \geq 0$, $n \in S$, для которого выполнены аналогичные стандартные условия, а вместо 1-периодичности предполагается, что

$$\lambda_n^*(t) - \lambda_n(t) = \hat{\lambda}_n(t), \ \mu_n^*(t) - \mu_n(t) = \hat{\mu}_n(t), \tag{0.14}$$

где "возмущения" интенсивностей малы: $|\hat{\lambda}_n(t)| \leq \varepsilon$, $|\hat{\mu}_n(t)| \leq \varepsilon$ при всех $t \geq 0$ и $n \in S$.

Как и в предыдущих параграфах, предполагается, что векторы вероятностей состояний рассматриваемых процессов описываются соответствующими прямыми системами Колмогорова.

Как и ранее, возьмем некоторую последовательность положительных чисел $1 = d_{-1} = d_0 \leq d_1 \leq \ldots$. Аналогично определим функцию (0.6), и некоторые вспомогательные величины (0.7).

Введем еще одну величину:

$$\Gamma = \sup_k \left(2 + \frac{d_{k+1}}{d_k} + \frac{d_{k-1}}{d_k}\right) \tag{0.15}$$

Теорема 5 *Пусть существует последовательность $\{d_i\}$ такая, что $\alpha^* > 0$, $\inf_{k\geq 1} \frac{d_{k-1}}{k} > 0$, а $\Gamma < \infty$ и $\alpha^* - \Gamma\epsilon > 0$. Тогда вспомогательный ПРГ $X(t)$ имеет 1-периодическое предельное среднее $\phi(t)$, причем для любого начального условия $X^*(0) = k$ и всех $t \geq 0$ справедлива оценка*

$$\left|E\left\{X^*(t)\left|X^*(0) = k\right.\right\} - \phi(t)\right| \leq$$
$$\frac{\mathsf{M}}{\mathsf{W}}\left(e^{(-\alpha^*+\Gamma\epsilon)t}\left(\frac{\mathsf{Ma}\nu_0}{\alpha^*} + \sum_{i=0}^{k} d_i\right) + \frac{\epsilon}{\alpha^* - \Gamma\epsilon}\left(1 + \frac{\Gamma\mathsf{Ma}\nu_0}{\alpha^*}\right)\right). \tag{0.16}$$

Теорема 6 *Пусть выполнены условия теоремы 5. Тогда ПРГ $X^*(t)$ имеет предельное среднее $\phi^*(t)$, причем выполняется неравенство*

$$\overline{\lim}_{t\to\infty}\left|\phi(t) - \phi^*(t)\right| \leq \frac{\mathsf{M}\epsilon}{\mathsf{W}\left(\alpha^* - \Gamma\epsilon\right)}\left(1 + \frac{\Gamma\mathsf{Ma}\nu_0}{\alpha^*}\right). \tag{0.17}$$

Замечание 3 *В отличие от случая, когда интенсивности ПРГ 1-периодичны, предельное среднее $\phi^*(t)$ для ПРГ $X^*(t)$ не обязано быть периодическим, а двойное среднее может и не существовать. Однако, некоторый более слабый аналог двойного среднего может быть оценен и в этой ситуации.*

Введем обозначения (верхнее и нижнее средние) для ПРГ $X^*(t)$:

$$\bar{\mathsf{E}}^* = \overline{\lim}_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t E\left\{X^*(u)\left|X^*(0) = k\right.\right\}du,$$
$$\underline{\mathsf{E}}^* = \underline{\lim}_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t E\left\{X^*(u)\left|X^*(0) = k\right.\right\}du.$$

Заметим, что двойное среднее E для ПРГ с 1-периодическими интенсивностями находится, как среднее по периоду от предельного среднего: $\mathsf{E} = \int_0^1 \phi(t)\,dt$. Поэтому из теоремы 6 получаем следствие 1.

Следствие 1 *Пусть выполнены условия теоремы 5. Тогда ПРГ $X^*(t)$ имеет верхнее и нижнее средние, причем выполняется неравенство*

$$\mathsf{E}-\frac{\mathsf{M}\epsilon}{\mathsf{W}\left(\alpha^*-\Gamma\epsilon\right)}\left(1+\frac{\Gamma\mathsf{Ma}\nu_0}{\alpha^*}\right) \leq \underline{\mathsf{E}}^* \leq \bar{\mathsf{E}}^* \leq \mathsf{E}+\frac{\mathsf{M}\epsilon}{\mathsf{W}\left(\alpha^*-\Gamma\epsilon\right)}\left(1+\frac{\Gamma\mathsf{Ma}\nu_0}{\alpha^*}\right). \tag{0.18}$$

Рассмотрим теперь вопросы, связанные с построением предельного, верхнего и нижнего средних для ПРГ $X^*(t)$. Введем некоторые вспомогательные понятия. Пусть $X_N(t),\ t > 0$ – "усеченный" ПРГ с пространством состояний $S_N = \{0, 1, 2, \ldots, N\}$ и 1-периодическими интенсивностями рождения $\lambda_n(t)$, $n \in S_{N-1}$, и гибели $\mu_n(t)$, $n \in S_N$ (и матрицей интенсивностей $A_N(t)$). Нижним индексом N будем обозначать соответствующие характеристики этого процесса.

Положим

$$\mathsf{W}_N = \inf_{k\geq 0} \frac{\sum_{i=0}^{k} d_{N-1+i}}{N+k}. \tag{0.19}$$

Рассмотрим приближенное вычисление $E\left\{X^*(t)\,|X^*(0)=k\right\}$, которое позволит вычислить и предельное среднее $\phi^*(t)$.

Теорема 7 *Пусть выполнены условия теоремы 5. Тогда при любых N, k и всех $t \geq 0$ выполняется неравенство*

$$\begin{gathered}\left|E\left\{X^*(t)\,|X^*(0)=k\right\} - E\left\{X_N(t)\,|X(0)=0\right\}\right| \leq \\ \frac{\mathsf{M}^2\mathsf{a}\nu_0}{\mathsf{W}\alpha^*}e^{-\alpha^* t} + \frac{3t\mathsf{Ma}\nu_0\left(L\mathsf{a}+M\mathsf{b}\right)}{\mathsf{W}_N\alpha^*} +\end{gathered} \tag{0.20}$$

$$\frac{\mathsf{M}}{\mathsf{W}}\left(e^{(-\alpha^*+\Gamma\epsilon)t}\left(\frac{\mathsf{Ma}\nu_0}{\alpha^*}+\sum_{i=0}^{k}d_i\right)+\frac{\epsilon}{\alpha^*-\Gamma\epsilon}\left(1+\frac{\Gamma\mathsf{Ma}\nu_0}{\alpha^*}\right)\right).$$

Следующее утверждение позволяет приближенно вычислять верхнее и нижнее средние для $X^*(t)$.

Теорема 8 *Пусть выполнены условия теоремы 5. Тогда при любом N и всех $t \geq 0$ выполняется неравенство*

$$\left|\bar{\mathsf{E}}^* - \int_t^{t+1} E\left\{X_N(u)\,|X(0)=0\right\}du\right| \leq \tag{0.21}$$

$$\frac{\mathsf{M}\epsilon}{\mathsf{W}\left(\alpha^*-\Gamma\epsilon\right)}\left(1+\frac{\Gamma\mathsf{Ma}\nu_0}{\alpha^*}\right)+\frac{\mathsf{M}^2\mathsf{a}\nu_0}{\mathsf{W}\alpha^*}e^{-\alpha^* t}+\frac{3(t+1)\mathsf{Ma}\nu_0\left(L\mathsf{a}+M\mathsf{b}\right)}{\mathsf{W}_N\alpha^*}.$$

Такая же оценка справедлива и для $\underline{\mathsf{E}}^*$.

В §1 главы 3 получены достаточные условия существования среднего и двойного среднего для конечного ОПТРГ с периодическими интенсивностями. Показаны способы вычисления средних.

Пусть $A(t)$ – матрица интенсивностей нашей цепи, далее всюду будем предполагать, что $A(t)$ 1-периодична и интегрируема на $[0,1]$. Введем "усредненную" матрицу

$$A_0 = \int_0^1 A(t)\,dt. \tag{0.22}$$

Определение 3 *Состояние i для однородной марковской цепи $X(t)$ называется достижимым, если для любого j существует t, при которых выполняется: $p_{ji}(t) > 0$.*

Теорема 9 *Пусть однородная цепь с матрицей интенсивностей A_0 имеет достижимое состояние. Тогда марковская цепь $X(t)$ с 1-периодической матрицей интенсивностей $A(t)$ слабо эргодична, имеет 1-периодические предельный режим $\pi(t)$ и предельное среднее $\phi(t)$, а*

также двойное среднее E, *причем найдутся* $\alpha > 0$ *и натуральное* m_* *такие, что при всех натуральных* n
1) при всех $t \geq m_* n$

$$\|\mathbf{p}(t) - \pi(t)\| \leq 2\,(1-\alpha)^n \tag{0.23}$$

для любого $\mathbf{p}(0)$,
2) при всех $t \geq m_* n$

$$|E\{X(t)\,|X(0)=k\} - \phi(t)| \leq 2N\,(1-\alpha)^n \tag{0.24}$$

для любого k,
3) для любого k

$$\left|\int_{m_* n}^{m_* n+1} E\{X(t)|X(0)=k\}\,dt - \mathsf{E}\right| \leq 2N\,(1-\alpha)^n\,. \tag{0.25}$$

В главе 4 приводятся описания некоторых моделей, для которых могут использоваться полученные результаты.

В главе 5 рассмотрено применение полученных результатов для решения конкретных задач: система с неограниченным числом мест ожидания, система с ограниченным числом мест ожидания, простейшие модели эпидемий.

Система с неограниченным числом мест ожидания Пусть система в каждый произвольный момент времени может находится в одном из состояний $E_0, E_1, E_2, \cdots$ множество которых конечно или счетно. Пусть, за промежуток длительности h система из состояния E_n в момент времени t с вероятностью $\lambda_n(t)h + o(h)$ переходит в состояние E_{n+1} и с вероятностью $\mu_n(t)h + o(h)$ - в состояние E_{n-1}. Вероятность того, что система за промежуток времени $(t, t+h)$ перейдет в состояние E_{n+k} или в состояние E_{n-k} при $k > 1$, бесконечно малы по сравнению с h. Вероятность того, что система за тот же промежуток времени останется в состоянии E_n равна $1 - \lambda_n(t)h - \mu_n(t)h + o(h)$.

Случайные процессы такого типа являются процессами рождения и гибели. Если под E_n понимать событие, состоящее в том, что численность популяции равна n, то переход $E_n \to E_{n+1}$ означает, что численность популяции увеличилась на единицу. Точно также на переход $E_n \to E_{n-1}$ следует смотреть как на гибель одного члена популяции.

Задавая $\lambda_n(t)$ и $\mu_n(t)$, можно получить различные модели. В частности, рассматривается применение к системам массового обслуживания(СМО).

Например рассмотрим применение к СМО с неограниченным числом мест ожидания.

Пусть имеется m обслуживающих приборов, каждый из которых доступен, когда он свободен, для каждого из поступающих в систему требований и одновременно способен обслуживать только одно требование. Каждое требование, поступившее в систему, начинает обслуживаться немедленно, если в ней имеется хотя бы один свободный прибор. Когда поступает требование и все приборы заняты, то оно сохраняется.

Основным предметом поиска является среднее число требований в системе (в единицу времени - предельное среднее, вообще - двойное среднее).

Для данной модели имеем:

$\lambda_n(t) = \lambda(t)$, $\mu_0(t) = 0$, $\mu_n(t) = n\mu(t)$ при $n \le m$, $m\mu(t)$ при $n > m$.

Следующий пример показывает, как на практике могут быть использованы полученные результаты.

Возьмем $X(t)$, $\quad t \ge 0$, нестационарный ПРГ с пространством состояний $E = \{0, 1, \dots\}$, и интенсивностями рождения $\lambda_n(t)$, $t \geq 0$, и гибели $\mu_n(t)$, $t \geq 0$, $\quad n \in E$.

Пример 1 *Пусть* $a(t) = 1 + sin2\pi t$ *и* $b(t) = 4 + 2cos2\pi t$ *(период* $T = 1$*). Согласно (0.3) имеем* $\nu_n = \eta_n = 1$*, используя (0.4), получаем* $L = M = 1$ *и из (0.5) имеем* $\mathsf{a} = 2$, $\mathsf{b} = 6$.

Пусть $d_k = 2^k$, $k \geq 0$.

Тогда согласно (0.6) $\alpha(t) = 1 - sin2\pi t + cos2\pi t$,

Далее используем (0.7):

$\alpha^* = \int_0^1 \alpha(t)\,dt = 1$, $M_0 = \sup_{|t-s|\leq 1} \int_s^t \alpha(u)\,du = 1 + \frac{1}{2\pi}$ *и*

$\mathsf{M} = e^{M_0 + \alpha^*} = e^{2+\frac{1}{2\pi}} < 10$, $\mathsf{W} = \inf_k \frac{\sum_{i=0}^{k-1} d_i}{k} = 1$ *и* $\mathsf{W}_N = \inf_{k\geq 0} \frac{\sum_{i=0}^{k} 2^{N-1+i}}{N+k} = \frac{2^{N-1}}{N}$.

Используя теоремы 1,2 и 3, получаем:

$$|E\{X(t)\,|X(0) = 0\} - \phi(t)| \leq 200e^{-t}$$
$$|E\{X(t)\,|X(0) = 0\} - E\{X_N(t)\,|X_N(0) = 0\}| \leq \frac{480Nt}{2^{N-1}}$$

и

$$|\phi(t) - E\{X_N(t)\,|X_N(0) = 0\}| \leq 200e^{-t} + \frac{480Nt}{2^{N-1}}.$$

По теореме 4 получаем

$$\left|\mathsf{E} - \int_t^{t+1} E\{X(u)\,|X(0) = 0\}\,du\right| \leq 200e^{-t},$$

и

$$\left|\mathsf{E} - \int_t^{t+1} E\{X_N(u)\,|X_N(0) = 0\}\,du\right| \leq 200e^{-t} + \frac{480N(t+1)}{2^{N-1}}.$$

Для того, чтобы полученные выше оценки выполнялись, можно взять $t = 17, N = 39$.

Таким образом, для $t = 17, N = 39$ *получаем* $|\mathsf{E} - 0,38312| \leq 10^{-5}$.

График 1 для предельного среднего $\phi(t)$ *когда* t *изменяется от 17 до 18.*

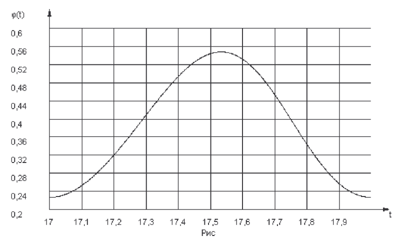

Рис 1: $\phi(t)$, for $t \in [17, 18]$

Простейшие модели эпидемий

Пример 2 *Процесс, описывающий модель сезонной эпидемии с двумя типами индивидов: здоровыми (восприимчивыми) и больными, с возможным увеличением (уменьшением) на единицу каждого типа, а также с переходом из одного типа в другой, и максимальным количество индивидов каждого класса* N_i, $i = 1, 2$. *Будем предполагать, что интенсивности рождения и гибели для каждого типа индивидов постоянны и равны 1, а интенсивности заражения и выздоровления есть* $0,5 + 0,4\cos(2\pi t)$ *и* $0,5 + 0,5\sin(2\pi t)$ *соответственно. Вместе с* $\phi(t)$ *и* E*, представляющими собой средние характеристики всей популяции, особый интерес представляют соответствующие средние* $\phi_i(t)$ *и* E_i *для каждого класса индивидов* ($i = 1, 2$). *Тогда при* $N_1 = N_2 = 3$ *получаем* $\alpha > 0,096847$ *и для вычисления средних с приемлемой точностью* ($0,000001$) *приходится брать* $t > 150$. *При этом находим двойные средние* $\mathsf{E}_1 = 1,005133$, $\mathsf{E}_2 = 0,994866$.

На рисунке 2 изображен график среднего $\phi_1(t)$ *(достаточно взять* $150 \leq t \leq 151$*);*

на рисунке 3 изображен график среднего $\phi_2(t)$.

Приложение содержит исходные тексты программы, с помощью которой проводились вычисления.

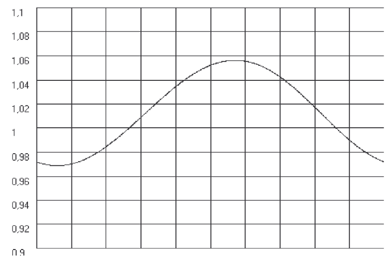

Рис 2: $\phi(t)$, for $t \in [150, 151]$

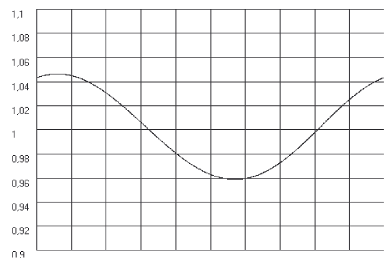

Рис 3: $\phi(t)$, for $t \in [150, 151]$

Автор выражает искреннюю благодарность доктору физико - математических наук, профессору Зейфману А.И. за постоянное внимание к работе и всестороннюю поддержку.

Публикации в изданиях, рекомендованных ВАК

[1] Зейфман А.И., Сатин Я.А. Средние характеристики марковских систем обслуживания // Автоматика и телемеханика, 2007, 9, 122-134

Остальные публикации

[2] S.Leorato, E.Orsingher, Ya.Satin, G.Shilova, A. Zeifman (2004). On some limits for nonhomogeneous birth and death processes. Trans.

of 24 Seminar of Stability Problems for Stochastic Models, Jurmala, Latvia, 52-53

[3] S.Leorato, E.Orsingher, Ya.Satin, G.Shilova, A. Zeifman On some characteristics for nonhomogeneous birth and death processes // Труды участников международной школы-семинара по геометрии и анализу. Ростов-на-Дону, 2004, 283 - 284.

[4] A. Zeifman, S.Leorato, E.Orsingher, Ya.Satin, G.Shilova. Some universal limits for nonhomogeneous birth and death processes. // Queueing Systems 52 ,2006, 139-151

[5] Зейфман А.И., Сатин Я.А., Шилова Г.Н., Орсингер Э. О построении двойного среднего для неоднородных процессов рождения и гибели //Современные проблемы теории функций и их приложения. Тезисы докладов зимней школы. Саратов, 2004, 283-284.

[6] Зейфман А.И., Сатин Я.А. О некоторых средних характеристиках конечных марковских цепей с непрерывным временем // Стат. методы оценивания и проверки гипотез. Пермь, ПГУ, 2005, 168-175.

[7] Ya.Satin, G.Shilova, A.Zeifman On some characteristics for finite nonhomogeneous birth and death processes// Trans. of 25 Seminar of Stability Problems for Stochastic Models, Salerno. Italy, 2005, 250-257

[8] Зейфман А.И., Сатин Я.А., Шилова Г.Н. Оценки средних некоторых неоднородных процессов рождения и гибели // Труды участников международной школы-семинара по геометрии и анализу. Ростов-на-Дону, 2006.

[9] Зейфман А.И., Сатин Я.А. Об оценках средних характеристик некоторых процессов рождения и гибели // Стат. методы оценивания и проверки гипотез. Пермь, ПГУ, 2006.

[10] Сатин Я.А. Предельные средние характеристики неоднородных процессов рождения и гибели с периодическими интенсивностями. // Саранск: Средневолжское математическое общество, 2006, препринт N 94.

[11] A.Zeifman, Ya. Satin, G. Shilova Bounds of the mean for some nonhomogeneous birth and death processes // Trans. of 26 Seminar of Stability Problems for Stochastic Models, Sovata-Bai, Romania, 2006, 91-92.

[12] Зейфман А.И., Панфилова Т. Л., Сатин Я. А., Шилова Г. Н., Лукина М. А. Исследование специальных свойств некоторых линейных систем дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения. Известия РАЕН, 2006, 11, 90-93.