Решения задач

1. Рассмотрим i-ю строку и j-й столбец матрицы. В строке выделим минимальный элемент a_{is}, а в столбце — максимальный элемент a_{tj}. Понятно, что $a_{is} \le a_{ij} \le a_{tj}$. Из этого следует вывод, что минимальный элемент любой из строк не превосходит максимального элемента любого из столбцов. Следовательно, максимальный среди минимальных элементов строк не превосходит минимального среди максимальных элементов столбцов. Неравенство именно это и утверждает.

2. Положим $a_n = 5^{2^n} - 1$. Прежде всего, $a_0 = 4$. Далее, $a_{n+1} = (5^{2^n})^2 - 1 = (5^{2^n} - 1)(5^{2^n} - 1) = a_n(a_n + 2)$. Поэтому a_n делится на 4 при всех $n \ge 0$. Поскольку при этом число $a_n + 2$ делится только на 2, но не на 4, то при увеличении n на 1, показатель максимальной степени двойки, на которую делится a_n, увеличится ровно на единицу. Отсюда легко прийти к выводу, что a_n делится на 2^{n+2}, но не делится на 2^{n+3}.

Ответ: 2^{n+2}.

3. При помощи индукции по $n \ge 1$, нетрудно доказать, что $f^{(n)}(x)$ будет иметь n точек разрыва, а именно: 0, 2, ..., $2(n-1)$. На промежутках $(2(n-1), \infty)$, $(2(n-2), 2(n-1)]$, ..., $(0,2]$, $(-\infty, 0]$ соответственно, функция принимает значения $x - 2n$, 2, 0, -2, ..., где три последних значения далее повторяются периодически.

Ответ: n.

4. Координата точки C задаётся случайной величиной ξ, равномерно распределённой на отрезке $[0,1]$. Выбирая точку D на отрезке AC тем же способом, мы умножаем ξ на случайную величину η, которая имеет такое же распределение, и при этом обе величины независимы. Следовательно, координата точки D ("начала того конца, которым оканчивается начало") описывается величиной $\xi\eta$. Ввиду независимости, имеем $M\xi\eta = M\xi M\eta = (1/2)(1/2) = 1/4$.

Ответ: 1/4.

5. Пусть $x \ne 0$; тогда в условии на функцию можно заменить x на $1/x$ и получить

$$\left(\frac{1}{x} + 1\right) f\left(\frac{1}{x}\right) = 1 - f(x),$$

что после арифметических преобразований даёт второе уравнение относительно неизвестных $f(x)$ и $f(1/x)$, а первое уравнение содержится в условии задачи. Решая систему, получаем

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + x + 1}.$$

6. Просуммируем по отдельности ряды вида

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{C_{n+k}^{k}}$$

для каждого $k \geq 2$, а затем сложим результаты. При $k = 2$ получаем:

$$\frac{1}{C_4^2} + \frac{1}{C_5^2} + \cdots + \frac{1}{C_n^2} + \cdots = 2! \left(\frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \cdots \right) = \frac{2}{3}$$

ввиду того, что члены ряда в скобках равны $1/3 - 1/4$, $1/4 - 1/5$, $1/5 - 1/6$, и так далее.

Если $k = 3$, то имеем ряд

$$\frac{1}{C_5^3} + \frac{1}{C_6^3} + \cdots + \frac{1}{C_n^3} + \cdots = 3! \left(\frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{1}{4 \cdot 5 \cdot 6} + \cdots \right) = \frac{3!}{2} \cdot \frac{1}{3 \cdot 4} = \frac{1}{4}$$

ввиду того, что величина, обратная $n(n+1)(n+2)$, может быть представлена в виде полуразности величин, обратных $n(n+1)$ и $(n+1)(n+2)$.

В общем случае мы умножаем $k!$ на сумму

$$\frac{1}{3 \cdot 4 \cdot \ldots (k+2)} + \frac{1}{4 \cdot 5 \cdot \ldots (k+3)} + \cdots .$$

Пользуясь тем, что величина, обратная $(n+1)(n+2) \cdots (n+k)$, равна разности величин, обратных $(n+1)(n+2) \cdots (n+k-1)$ и $(n+2)(n+2) \cdots (n+k)$, поделённой на $k-1$, мы в итоге находим значение суммы:

$$\frac{k!}{k-1} \cdot \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot \ldots (k+1)} = \frac{2}{(k-1)(k+1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k+1}.$$

Поэтому остаётся лишь просуммировать все эти величины по $k \geq 2$. Для чётных значений k у нас возникнет ряд

$$\left(1 - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \cdots$$

с суммой 1, а для нечётных — ряд

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6}\right) + \cdots$$

с суммой $1/2$. В итоге получается $1 + 1/2 = 3/2$.

Ответ: $3/2$.

7. Представим интеграл из условия задачи в виде суммы двух интегралов – от 0 до $\pi/4$ и от $\pi/4$ до $\pi/2$. После замены вида $x \mapsto \pi/2 - x$ во втором интеграле, получится интеграл от функции того же вида, но с заменой тангенса на котангенс. Пределы интегрирования станут равны 0 и $\pi/4$, и в этих пределах нужно проинтегрировать сумму двух функций. Полагая $y = (\operatorname{tg} x)^{\sqrt{2}}$, мы имеем под знаком интеграла функцию $1/(1+y) + 1/(1+y^{-1})$, что тождественно равно 1. Поэтому значение интеграла равно $\pi/4$. (Этот результат не зависит от выбора показателя степени, в которую возводится тангенс.)

Ответ: $\pi/4$.

8. Пусть параболы касаются друг друга в точке (x_0, y_0). Вычисляя угловой коэффициент общей касательной, проведённой к графикам в этой точке, мы видим, что он равен $2x_0$ и $2y_0$ в двух разных системах координат, отличающихся друг от друга переменой осей. Это означает, что рассматриваемые числа взаимно обратны, то есть $(2x_0)(2y_0) = 1$.

Далее для удобства вычислений будем считать, что касание происходит в точке (x, y), и тогда параметры a и b должны удовлетворять условию, при котором система из трёх уравнений

$$\begin{cases} y = x^2 + a \\ x = y^2 + b \\ 4xy = 1 \end{cases}$$

является совместной. Удобно ввести новые обозначения $u = 2x$, $v = 2y$, $c = 4a$, $d = 4b$, приводя систему к виду

$$\begin{cases} 2v = u^2 + c \\ 2u = v^2 + d \\ uv = 1 \end{cases}$$

Домножение первого уравнения на v приводит к условию $2v^2 = u + cv$, откуда с учётом $v^2 = 2u - d$ имеем $4u - 2d = u + cv$, то есть $3u - cv = 2d$. Из соображений симметрии, получаем также $3v - du = 2c$. Легко понять, что система

$$\begin{cases} 3v = du + 2c \\ 3u = cv + 2d \\ uv = 1 \end{cases}$$

окажется равносильна предыдущей: после домножения первого уравнения на v имеем $3v^2 = d + 2cv$, а с учётом второго, то есть $cv = 3u - 2d$, выводим $3v^2 = d + 6u - 4d$, что равносильно $2u = v^2 + d$. Аналогично получается условие $2v = u^2 + c$.

Таким образом, после домножения первого уравнения на 3, а второго на d, а затем сравнивая, получаем $(9 - cd)v = 2(3c + d^2)$. Аналогично, $(9 - cd)u = 2(c^2 + 3d)$. В "вырожденном"случае $cd = 9$ это даёт $3d = -c^2$, $3c = -d^2$, то есть $c = d = -3$. Тогда система состоит из уравнений $u + v = -2$, $uv = 1$, то есть $u = v = -1$.

В "невырожденном"случае, то есть когда определитель системы, состоящей из первого и второго уравнения, не равен нулю, получается единственное решение $u = 2(c^2 + 3d)/(9 - cd)$, $v = 2(3c + d^2)/(9 - cd)$. С учётом третьего уравнения, должно выполняться равенство $(9 - cd)^2 = 4(c^2 + 3d)(3c + d^2)$. Заметим, что в "вырожденном"случае оно также выполнено, а потому является необходимым и достаточным для совместности системы из трёх уравнений. Преобразуя, имеем $81 - 18cd + c^2d^2 = 4c^2d^2 + 12c^3 + 12d^3 + 36cd$, что после упрощений даёт $4c^3 + 4d^3 + c^2d^2 + 18cd = 27$. Осталось заменить c на $4a$ и d на $4b$.

Ответ: $256(a^3 + b^3 + a^2b^2) + 288ab = 27$.